ISTITUTO DI ISTRUZIONE SECONDARIA "DANIELE CRESPI"
Liceo Internazionale Classico e Linguistico VAPC02701R
Liceo delle Scienze Umane VAPM027011
Via G. Carducci 4 – 21052 BUSTO ARSIZIO (VA)
www.liceocrespi.it-***Tel. 0331 633256 - Fax 0331 674770 - E-mail: lccrespi@tin.it***
C.F. 81009350125 – Cod.Min. VAIS02700D

UNI EN ISO 9001: 2008

CertINT® 2011

Anno Scolastico 2011-2012 Classe 4^O – prof.ssa Silvana Castiglioni

Testo: Dodero-Baroncini-Manfredi Moduli di lineamenti di matematica Moduli: F, K, N
Ghisetti e Corvi

Compiti per le vacanze di MATEMATICA

- Rivedere gli argomenti teorici sul testo
- per chi ha riportato la votazione
  - **6**: tutti gli esercizi
  - **7** o **8**: metà degli esercizi per ogni argomento
  - **9** o **10**: il 25% degli esercizi per ogni argomento
- Controllo del lavoro: prima ora di matematica a.s. 2012-13
- Lettura consigliata: Denis Guedj La chioma di Berenice casa editrice:Tea

Indicazioni per il recupero e per il consolidamento di MATEMATICA

- Per ogni argomento:
  - rivedere la teoria sul testo
  - eseguire nell'ordine gli esercizi sotto elencati
- Si raccomanda l'ordine nello svolgimento del lavoro
- Il lavoro estivo è finalizzato al ripasso e al consolidamento degli argomenti studiati nel corso dell'anno; pertanto deve essere svolto con continuità e gradualità, evitando di concentrare tutto in pochissimo tempo
  Consegnare il lavoro sotto indicato, ordinato per argomento, nel giorno stabilito dal DS: mercoledì 29 agosto

GEOMETRIA ANALITICA
Circonferenza

Scrivere le equazioni delle circonferenze di centro C e raggio r.

1. $C(-2; 0)$ $r = 1$ $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$

2. $C(-1; 4)$ $r = 3$ $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$

3. $C(0; \sqrt{2})$ $r = \sqrt{2}$ $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}y = 0$

4. $C\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ $r = \frac{1}{2}$ $16x^2 + 16y^2 - 16x - 24y + 9 = 0$

Verificare se le equazioni date rappresentano circonferenze reali; in caso affermativo determinarne centro e raggio.

5. $x^2 + y^2 = 9$ Sì; $C(0; 0)$; $r = 3$

6. $x^2 + y^2 + 9 = 0$ No

7. $x^2 + y^2 - 4x = 0$ Sì, $C(2; 0)$; $r = 2$

14. Scrivere l'equazione della circonferenza avente centro in (1; 3) e tangente alla retta di equazione: $4x - 5y + 1 = 0$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = \frac{100}{41}$$

15. Scrivere l'equazione della circonferenza passante per $A(1; 4)$ e $B(-2; 1)$ e avente il centro C sulla retta $3x - y + 4 = 0$.

$$x^2 + y^2 + x - 5y + 2 = 0$$

16. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento di estremi $A(3; 4)$ e $B(9;12)$.

$$x^2 + y^2 - 12x - 16y + 75 = 0$$

17. Determinare l'equazione della circonferenza di centro $C(2; 1)$ e tangente all'asse del segmento di estremi $A(-2; 0)$ e $B(1; 2)$. Determinare l'area del triangolo ABC.

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + \frac{35}{52} = 0; \text{ area} = \frac{5}{2}$$

Parabola

Determinare le equazioni delle parabole aventi il fuoco e la direttrice indicati.

32. $F(1; 2)$ $\quad d: y = 3$ $\qquad y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$

33. $F\left(0; \frac{5}{4}\right)$ $\quad d: y = \frac{3}{4}$ $\qquad y = x^2 + 1$

34. $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ $\quad d: y = -\frac{1}{4}$ $\qquad y = x^2$

Dopo aver determinato le coordinate del fuoco F, del vertice V, le equazioni della direttrice e dell'asse di simmetria, disegnare le seguenti parabole.

35. $y = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad F\left(0; \frac{1}{2}\right)$; $V(0; 0)$; $y = -\frac{1}{2}$; $x = 0$

36. $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ $\qquad F(0; 0)$; $V(0; -1)$; $y = -2$; $x = 0$

38. Determinare l'equazione della parabola con vertice $(2; -1)$ e direttrice $y = 3$.

$$(x-2)^2 = -16(y+1)$$

39. Determinare l'equazione della parabola del tipo $y = ax^2 + bx + c$ avente vertice in $(1; -1)$ e passante per $(2; 3)$.

$$(x-1)^2 = \frac{1}{4}(y+1)$$

40. Determinare l'equazione della parabola avente per asse di simmetria la retta $x = 1$ e passante per i punti $(0; 1)$ e $(-1; 4)$.

$$y = x^2 - 2x + 1$$

46. Determinare la misura della corda staccata dalla parabola $y = -x^2 + 5x - 6$ sulla retta $x + y + 1 = 0$.

$[4\sqrt{2}]$

47. Determinare per quale valore di q la retta $y = -x + q$ è tangente alla parabola $y = x^2 - 3x + 1$ e calcolare le coordinate del punto di contatto. $[0;\ (1\ ;\ -1)]$

48. Scrivere l'equazione della retta tangente alla parabola $x = -y^2 + 3y$ nel suo punto di ordinata 2.

$[x + y - 4 = 0]$

GONIOMETRIA

Valori delle funzioni goniometriche, archi associati, formule goniometriche

Calcolare il valore delle seguenti espressioni.

1. $\text{sen}\ \dfrac{\pi}{2} + 2\ \text{sen}\ \pi - 3\ \text{sen}\ \dfrac{3}{2}\pi - 2\ \text{sen}\ 0$ — 4

2. $4\ \text{sen}\ 2\pi - \dfrac{3}{2}\ \text{sen}\ \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{5}{2}\ \text{sen}\ \dfrac{5}{2}\pi - \dfrac{1}{2}\text{sen}\ \pi$ — 1

3. $5\ \text{sen}\ \dfrac{\pi}{2} - 4\ \text{sen}\ \dfrac{7}{2}\pi - 5\ \text{sen}\ 2\pi + \dfrac{1}{2}\ \text{sen}\ 0$ — 9

4. $2\ \text{sen}\ \dfrac{\pi}{4} - \sqrt{2}\ \text{sen}\ \dfrac{3}{2}\pi - 4\ \text{sen}\ \dfrac{\pi}{3}$ — $2(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

8. $\text{sen}\ \dfrac{\pi}{4} - \cos\ \dfrac{\pi}{4} + \text{sen}\ \dfrac{\pi}{3} - \cos\ \dfrac{\pi}{6}$ — 0

9. $8\ \cos\ \dfrac{\pi}{3} + 4\,\text{sen}\ \dfrac{\pi}{6} - \sqrt{2}\,\text{sen}\ \dfrac{\pi}{4} + \sqrt{2}\ \cos\ \dfrac{\pi}{4}$ — 6

10. $\text{sen}\ 90° - \cos\ 30° + 2\ \text{sen}\ 60° + \text{sen}\ 180°$ — $1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11. $\dfrac{3\ \text{sen}\ \dfrac{3}{2}\pi\left(\dfrac{4}{3}\ \text{sen}\dfrac{\pi}{2} - 4\ \text{sen}\ \pi\right)}{5\ \cos\dfrac{3}{2}\pi + 7\ \cos\pi\,(1 - \cos\pi)}$ — $\dfrac{2}{7}$

14. $\dfrac{\sqrt{2}\ \text{sen}\dfrac{\pi}{4} + \sqrt{3}\cos\ \dfrac{\pi}{6} - \text{tg}\ \dfrac{\pi}{3}\ \text{ctg}\ \dfrac{\pi}{3}}{\text{ctg}\ \dfrac{\pi}{6} + \text{tg}\ \dfrac{\pi}{6}}$ — $\dfrac{3}{8}\sqrt{3}$

15. $\dfrac{2\,\text{tg}\,45° - \text{tg}\,360° + \text{ctg}\,90°}{2\cos 30° - \text{sen}\,90°}$ — $\sqrt{3} + 1$

Determinare i valori delle rimanenti funzioni goniometriche dell'arco α sapendo che:

16. $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{1}{3}$ $\quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ — $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3};\ \text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}};\ \text{ctg}\,\alpha = 2\sqrt{2}$

17. $\cos\alpha° = -\dfrac{3}{5}$ $\quad 90° < \alpha° < 180°$ — $\text{sen}\,\alpha° = \dfrac{4}{5};\ \text{tg}\,\alpha° = -\dfrac{4}{3};\ \text{ctg}\,\alpha° = -\dfrac{3}{4}$

24. $\operatorname{tg} 30° + \operatorname{ctg} 60° - \operatorname{sen} 120° + \cos(-30°)$ $\qquad \frac{2}{3}\sqrt{3}$

25. $\dfrac{\operatorname{sen} \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\cos\frac{5}{6}\pi + \sqrt{3}\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right)}{\ldots 7}$ $\qquad \frac{3}{2}$

29. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 \frac{5}{3}\pi + \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + \cos^2\frac{4}{3}\pi}$ $\qquad 6$

30. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{7}{6}\pi\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)}$ $\qquad -2$

Sfruttando le relazioni tra gli archi associati, semplificare le seguenti espressioni, esprimendo il risultato per mezzo delle funzioni goniometriche dell'arco di misura α.

32. $2\operatorname{sen}(\pi-\alpha) + \cos(\pi-\alpha) - \operatorname{sen}\alpha + 3\cos\alpha$ $\qquad \operatorname{sen}\alpha + 2\cos\alpha$

33. $2\operatorname{sen}(180° - \alpha°) - \cos^2(180° - \alpha°) + 2$ $\qquad (\operatorname{sen}\alpha° + 1)^2$

34. $[1 + \operatorname{tg}(\pi-\alpha)](1+\operatorname{tg}\alpha) + \dfrac{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\alpha}$ $\qquad \cos^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha$

35. $\dfrac{\operatorname{ctg}(180° - \alpha°) - \operatorname{tg}(180° - \alpha°)}{\operatorname{tg}\alpha° - \operatorname{ctg}\alpha°}$ $\qquad 1$

36. $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\operatorname{tg}\alpha$ $\qquad 0$

37. $\dfrac{1}{1+\cos(\pi+\alpha)} + \dfrac{\cos(\pi+\alpha)}{1-\cos^2(\pi+\alpha)}$ $\qquad \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

48. In un triangolo due angoli hanno ampiezze α e β. Sapendo che:

$$\beta = \frac{\pi}{4} \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = -\frac{1}{5}$$

determinare le funzioni goniometriche del terzo angolo γ.

$\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}{10}; \quad \cos\gamma = \dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{10}$

Equazioni goniometriche

1. $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$ $\qquad x = k\pi;\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

2. $2\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$ $\qquad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

3. $2\operatorname{sen}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x = 0$ $\qquad x = k\pi;\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

4. $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$ $\qquad x = k\pi;\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

5. $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ $\qquad x = \frac{\pi}{6} + k\pi;\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

12. $2\cos^2\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)-5\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)-3=0$ $\qquad x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2};\ x=-\frac{5}{24}\pi+k\frac{\pi}{2}$

13. $\mathrm{tg}^3x-\mathrm{tg}^2x-3\,\mathrm{tg}\,x+3=0$ $\qquad x=\frac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$

14. $\mathrm{tg}^4x-4\,\mathrm{tg}^2x+3=0$ $\qquad x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2};\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$

15. $2\,\mathrm{sen}\,x\cos x-\cos x=0$ $\qquad x=\frac{\pi}{2}+k\pi;\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$

Disequazioni goniometriche

29. $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad -\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{\pi}{4}+2k\pi$

30. $\mathrm{tg}\,x>-\sqrt{3}$ $\qquad -\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$

31. $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1<0$ $\qquad \frac{2}{3}\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi$

32. $\mathrm{tg}\,2x-1<0$ $\qquad -\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$

35. $2\,\mathrm{sen}^2x-\mathrm{sen}\,x-1<0$ $\qquad -\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7}{6}\pi+2k\pi;\ x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi$

36. $\mathrm{tg}^2x-(1+\sqrt{3})\mathrm{tg}\,x+\sqrt{3}>0$ $\qquad -\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi;\ \frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$

37. $2\cos^2x+\cos x-1>0$ $\qquad -\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi$

TRIGONOMETRIA

Triangoli rettangoli

53. Determinare la misura del perimetro e l’area di un triangolo rettangolo sapendo che un cateto misura 24 cm e il seno dell’angolo ad esso opposto è $\frac{12}{13}$ [60 cm e 120 cm^2]

54. Il triangolo isoscele ABC ha la base AB di 70 cm e il seno dell’angolo alla base pari a $\frac{12}{13}$; determinare il perimetro del triangolo e la lunghezza dell’altezza CH relativa alla base. [252 cm e 84 cm]

55. Determinare il perimetro di un triangolo isoscele ABC di cui si conosce l’altezza AH, di 21 cm, relativa alla base BC e il cui angolo al vertice è di 120°. [$42\left(2+\sqrt{3}\right)$ cm]

56. Nel triangolo ABC, rettangolo in A, il cateto AB è di 24 cm e il seno dell’angolo ad esso opposto è $\frac{4}{5}$; determinare il perimetro del triangolo. [72 cm]

ESPONENZIALI

Equazioni esponenziali

1. $3^{x^2+x}=1;\quad 2^{2-8x}=4^{3x+1};\quad 2^{x^3}=256.$ $[0 \text{ e } -1;\ 0;\ 2]$

2. $\sqrt{2\sqrt{2}}=4^{1-x};\quad \dfrac{1}{4\sqrt{2}}=\sqrt{8^x};\quad \left(\dfrac{1}{n}\right)^{2x+1}=1.$ $\left[\dfrac{5}{8};\ -\dfrac{5}{3};\ -\dfrac{1}{2}\right]$

3. $\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}=1;\quad \sqrt[3]{5^x}=25;\quad 4^{4x}=2^{\frac{2}{x}}.$ $\left[-\dfrac{1}{2};\ 6\ ;\ \pm\dfrac{1}{2}\right]$

4. $\dfrac{3^{1-x}\cdot 9^{2+x}}{27^x}=\dfrac{1}{3};\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}=\left(\dfrac{27}{8}\right)^{1-2x};\quad \sqrt{2\sqrt{4^x}}=4.$ $\left[3;\ \dfrac{4}{5};\ 3\right]$

6. $3^{x+2}+3^{x+1}+3^x=351.$ (Si noti che $3^{x+2}=3^x\cdot 3^2$...); $4^{x-1}+4^x+4^{x+1}=\dfrac{21}{8}.$ $\left[3;\ -\dfrac{1}{2}\right]$

7. $3^{2x}-3^x-6=0.$ (Porre $3^x=y\ldots$). $[1]$

8. $4^x-6\cdot 2^x+8=0.$ (Si noti che $4^x=(2^2)^x=(2^x)^2\ldots$); $9^x+6\cdot 3^x-27=0.$ $[1 \text{ e } 2;\ 1]$

9. $12\left(\dfrac{4}{9}\right)^x-35\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+18=0;\quad 16\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-10\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+1=0.$ $[-2 \text{ e } 1;\ 1 \text{ e } 3]$

10. $\dfrac{3^{2-x}-3^{1-x}}{9^{x+1}-3^{2x+1}}=27^{1+3x}.$ (Porre $3^x=y\ldots$). $\left[-\dfrac{1}{4}\right]$

Disequazioni esponenziali e logaritmiche

289. $2^{x^2-4}>8;\quad 3^{x-5}<27$ $[x<-\sqrt{7},\ x>\sqrt{7};\ x<8]$

290. $2^{2x}-8\cdot 2^x>0$ $[x>3]$

291. $a^{2x}-a^x>0\qquad (\text{con } a>1)$ $[x>0]$

292. $2^{2x}-5\cdot 2^x+4>0$ $[x<0,\ x>2]$

293. $2^{2x}-10\cdot 2^x+16<0$ $[1<x<3]$

294. $\dfrac{2^x-1}{8-2^x}>0;\quad \dfrac{3^{x+1}-3^{1-x}}{1-2^{x^2-1}}\geq 0$ $[0<x<3;\ 0\leq x<1]$

295. $\dfrac{1}{2^x}-\dfrac{3}{4^x}<0$ $[x<\log_2 3]$

296. $3^{2x}-11\cdot 3^x+18>0$ $[x<\log_3 2,\ x>2]$

297. $7^{x^2+4x}>0;\quad 2^{x+7}+4>0$ $[\text{ogni } x;\ \text{ogni } x]$

298. $2^{x+4}>-1;\ 3^{x^2+1}<-2$ $[\text{ogni } x;\ \text{impossibile}]$

Busto Arsizio, 7 giugno 2012

L'insegnante

I rappresentanti di classe